$F_1(x) = 1 - (1+x)e^{-x}$.

2)a- $\forall n \geq 2; F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}dt$ $\left(\begin{array}{ccc} v'(t)=e^{-t} & \curvearrowright & v(t)=-e^{-t} \\ u(t)=t^n & \curvearrowright & u'(t)=nt^{n-1} \end{array} \right)$

$= [-e^{-t}t^n]_0^x - \int_0^x -nt^{n-1}e^{-t}dt$

$= -x^n e^{-x} + n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt = -x^n e^{-x} + nF_{n-1}(x)$

conclusion: $F_n(x) = nF_{n-1}(x) - x^n e^{-x}$; $\forall n \geq 2$

b- ▼ $1!\left[1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right] = 1 - (\frac{x^0}{0!}e^{-x} + \frac{x^1}{1!}e^{-x})$

$= 1 - (e^{-x} + xe^{-x}) = 1 - (1+x)e^{-x} = F_1(x)$

$\Rightarrow$ la proposition est vraie pour n = 1.

◄ soit $p \in IN^*$; supposons que $F_p(x) = p!\left[1 - \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right]$,

montrons que $F_{p+1}(x) = (p+1)!\left[1 - \sum_{k=0}^{p+1} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right]$. En effet

$F_{p+1}(x) = (p+1)F_p(x) - x^{p+1}e^{-x}$

$= (p+1)p!\left[1 - \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right] - x^{p+1}e^{-x}$

$= (p+1)!\left[1 - \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!}e^{-x} + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}e^{-x}\right)\right]$

$= (p+1)!\left[1 - \sum_{k=0}^{p+1} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right]$

$\Rightarrow$ la proposition est vraie à l'ordre (p + 1)

Ainsi : ▼ et ◄ $\Rightarrow \forall n \in IN^*; F_n(x) = n!\left[1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right]$.

c- $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[n!\left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right)\right]$

$= n!\left[1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right]$

$= n!\left[1 - \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} - \sum_{k=1}^{n} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\right]$

(car on a une somme finie de fonction)

* *

Pour $k \in IN^*$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(xe^{-\frac{x}{k}}\right)^k$

(On pose $X = \frac{x}{k}$ quand $x \to +\infty; X \to +\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^k e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} (kXe^{-X})^k = \lim\limits_{X\to+\infty} \left(k\frac{X}{e^X}\right)^k = 0$

* *

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) = n!$.

3) $\forall n \in IN^*; \forall x > 0$;

$t \in [0;x] \Leftrightarrow 0 \leq t \leq x \Leftrightarrow -x \leq -t \leq 0$